

این نمونه سوال حل شده، توسط تیم آموزشی "ریاضی با هم" آماده شده، امیدواریم
بتونه بهتون کمک کنه که برای امتحان پایان ترم آماده بشید 😊

برای دریافت جزوه‌های رایگان "ریاضی با هم" دو راه وجود داره:
۱. عضویت در کانال تلگرام "ریاضی با هم" به آدرس:

@RiaziBaHam

۲. مراجعه به سایت "ریاضی با هم" به آدرس:

www.riazibaham.ir

نمونه سوال حل شده ترم اول

پایه دهم

رشته ریاضی و تجربی

۱ مجموعه‌های زیر راباعضاء نمایش دهید. کدام مجموعه متناهی و کدام نامتناهی است؟

الف) $Z - W =$ ب) $W - N =$

ابتدا مجموعه‌های Z و W و N رو نمایش میدیم:

$$Z = \{ \dots, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, \dots \}$$

$$W = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

بنابراین:

الف:

$$Z-W = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$$

این مجموعه نامتناهی.

ب:

$$W-N = \{0\}$$

این مجموعه متناهی.

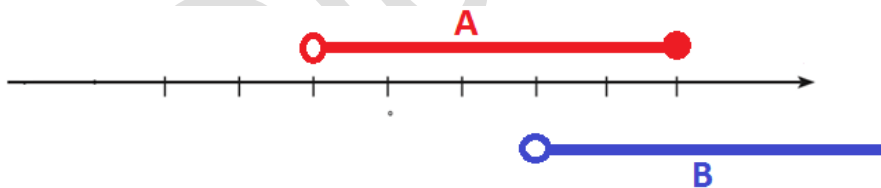
۲ اگر $A = (-1, 4]$ و $B = (2, +\infty)$ ، مجموعه های زیر را به صورت بازه تعیین و بر روی محور اعداد نمایش دهید. از قسمت های ب و ج چه نتیجه ای می گیرید؟

الف) $A \cup B =$

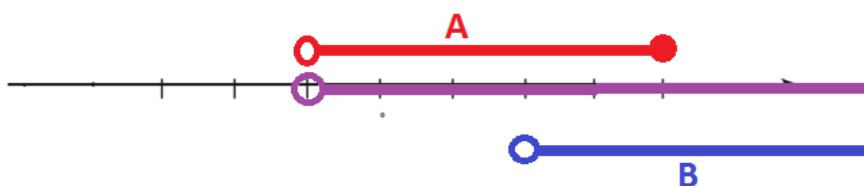
ب) $A \cap B' =$

ج) $A - B =$

مجموعه های A و B، روی محور نمایش می‌دهیم:



الف: باید قسمت‌هایی رو نشون بدیم که یا مجموعه A یا مجموعه B و یا هر دو مجموعه حضور دارن، بنابراین:

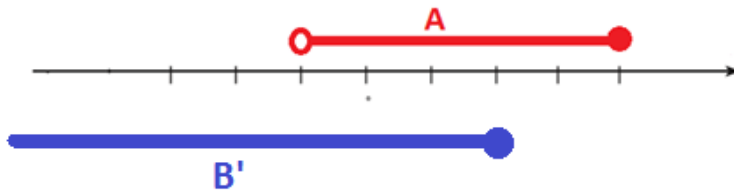


اگر بفوایم این قسمت رو بصورت بازه بنویسیم برابر میشه با:

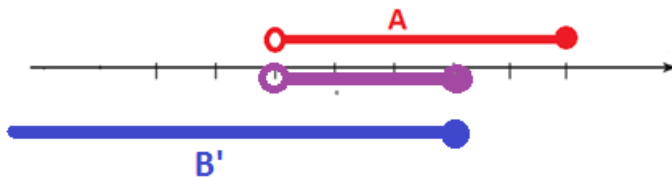
$$(-1, +\infty)$$

ب:

B' رو هم روی محور نشون میدیم:



حالا اشتراک این دو تا رو میفوایم به دست بیاریم:

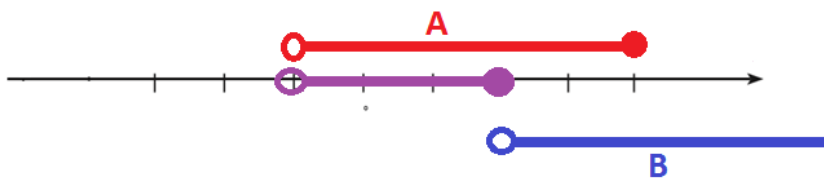


اگر بفوایم این قسمت رو بصورت بازه بنویسیم برابر میشه با:

$$(-1, +2]$$

ج:

$A-B$ یعنی جاهایی که A هست ولی B نیست، یعنی قسمت‌های زیر:



اگر بفوایم این قسمت رو بصورت بازه بنویسیم برابر میشه با:

$$(-1, +2]$$

قسمت ب و ج با هم برابر شدن، یعنی:

$$A - B = A \cap B'$$

۳ فرض کنیم A, B دو زیر مجموعه از مجموعه مرجع M باشند و داشته باشیم:
 $n(M) = 100, n(A) = 60, n(B) = 40, n(A \cap B) = 20$
مطلوب است:

الف) $n(A \cup B) =$

ب) $n(A \cap B) =$

الف:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

باگذاری می‌کنیم:

$$n(A \cup B) = 60 + 40 - 20 = 80$$

ب:

برای این قسمت از نمودار ون استفاده می‌کنیم، اطلاعاتی رو که داریم به نمودار منتقل می‌کنیم:

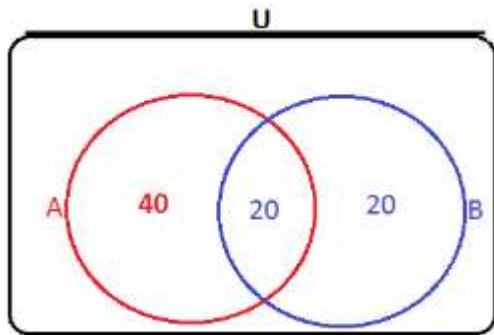
تعداد عضوهای مجموعه A برابر ۶۰ تاس که ۲۰ تاش با B مشترک

یعنی ۴۰ تا فقط مخصوص به A هست و ۲۰ تا بین هر دو مشترک

تعداد عضوهای مجموعه B هم ۴۰ تاس که ۲۰ تاش با A مشترک.

یعنی ۲۰ تا فقط مخصوص B هست و ۲۰ تاش بین هر دو مشترک

تا اینجا شکل زیر رو داریم:



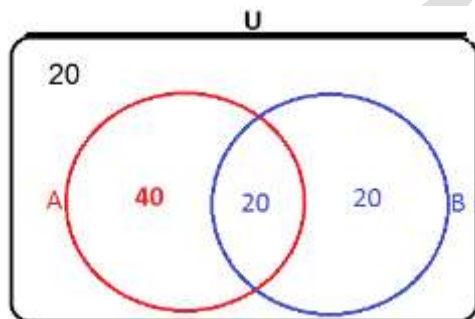
صورت سوال به ما گفته که تعداد عضوهای U برابر ۱۰۰ هست.

از این ۱۰۰ تا ۴۰ تاش برای A ، ۲۰ تاش برای B و ۲۰ تاش برای قسمت اشتراک A و B هست.

از این ۱۰۰ تا چند تاش باقی میمونه؟

$$100 - 40 - 20 - 20 = 20$$

پس ۲۰ رو هم داخل U و خارج از A و B می نویسیم؛



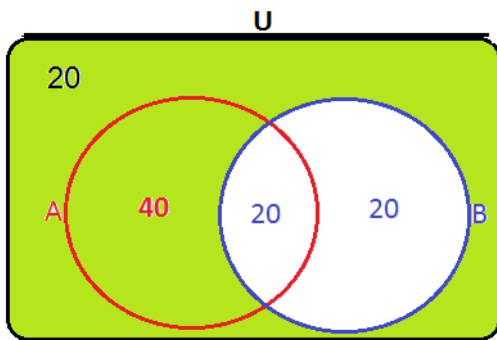
همه اطلاعاتی که صورت سوال به ما داده بود رو در شکل نشون دادیم، حالا میریم سراغ قسمت ب:

ب:

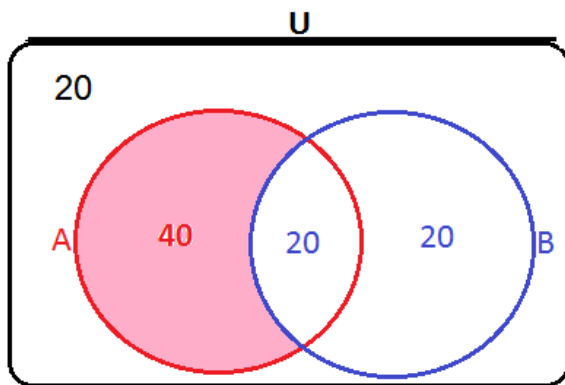
$$n(A \cap B')$$

باید مشخص کنیم که $A \cap B'$ چند تا عضو داره. کافیه که توی نمودار $A \cap B'$ رو مشخص کنیم:

اول B' رو روی شکل نشون میدیم، که میشه قسمتهایی از مجموعه مربع که شامل B نیست:



قسمتهایی که با رنگ سبز مشخص شده، نشوندهنده B' هست. برای مشخص کردن $A \cap B'$ ، باید اشتراک قسمت سبز رنگ رو با مجموعه A به دست بیاریم:



قسمتی که با رنگ صورتی نشون داده شده نشوندهنده $A \cap B'$ هست. این قسمت چند تا عضو داره؟ ۴۰ تا. بنابراین:

$$n(A \cap B') = 40$$

در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر در درس فیزیک و ۲۰ نفر در درس ریاضی قبول شده اند و ۵ نفر در هیچ درسی قبول نشده اند.

الف) چند نفر در هر دو درس قبول شده اند؟

ب) چند نفر فقط در درس فیزیک قبول شده اند؟

ج) چند نفر حداقل در یکی از دو درس قبول شده اند؟

مجموعه ها را نامگذاری می کنیم:

A: کسانی که در درس فیزیک قبول شدن

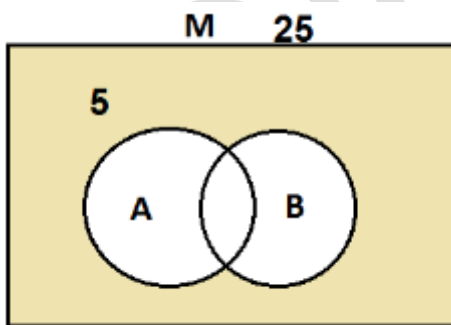
B: کسانی که در درس ریاضی قبول شدن.

M: مجموعه مربع (یا کل کلاس)

مساله اطلاعات زیر رو به ما داده:

$$n(A) = 15, \quad n(B) = 20$$

اطلاعات داده شده رو روی نمودار ون نشون میدیم:



کل کلاس ۲۵ نفره.

چرا ۵ رو خارج از A و B نوشتیم؟

چون ۵ نفر در هیچ درسی قبول نشدن.

از این مطالب چه نتیجه ای می گیریم؟

تعداد عضوهای $A \cup B$ برابر ۲۰ هست. یعنی:

$$n(A \cup B) = 20$$

حالا می‌رییم سراغ سوالها:

الف:

کسانی که در هر دو درس قبول شدن رو با پی نشون می‌دییم؟ $A \cap B$

پس باید $n(A \cap B)$ رو به دست بیاریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$20 = 15 + 20 - n(A \cap B) \rightarrow n(A \cap B) = 15$$

ب:

تعداد کسانی که در درس فیزیک قبول شدن چند نفرن؟ ۱۵ نفر

از طرفی طبق قسمت الف، $n(A \cap B) = 15$ ، پس نتیجه می‌گیریم همه کسانی که در

درس فیزیک قبول شدن، در درس ریاضی رو هم قبول شده.

پس کسی نیست که فقط درس فیزیک رو قبول شده باشه.

ج:

گفته چند نفر حداقل در یکی از دو درس قبول شدن؟

قبول شدن در حداقل یکی از دو درس یعنی $A \cup B$

پس تعداد کسانی که حداقل در یکی از دو درس قبول شدن، یعنی $n(A \cup B)$

که این رو هم اول به دست آوردیم:

$$n(A \cup B) = 20$$

۵ | در یک دنباله ی حسابی (خطی) جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می باشند. جمله ی عمومی الگو را بیابید.

فرمول کلی جمله عمومی رو می نویسیم و هر اطلاعاتی که داریم رو توی اون جاگذاری می کنیم. جمله عمومی یه دنباله حسابی چیه؟

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

سوال چه اطلاعاتی به ما داده؟

جمله چهارم برابر ۱۷ هست. این یعنی اگه به جای n قرار بدیم ۴، اونوقت t_4 برابر ۱۷ میشه:

$$t_4 = t_1 + (4 - 1)d \rightarrow t_1 + 3d = 17$$

جمله دهم برابر ۴۱ هست. این یعنی اگه به جای n قرار بدیم ۱۰، اونوقت t_{10} برابر ۴۱ میشه:

$$t_{10} = t_1 + (10 - 1)d \rightarrow t_1 + 9d = 41$$

دو معادله داریم و دو مجهول، معادله ها رو حل می کنیم و جمله اول و قدرنسبت رو به دست میاریم:

$$t_1 = 5 \quad \text{و} \quad d = 4$$

بنابراین جمله عمومی برابر میشه با:

$$t_n = 5 + 4(n - 1)$$

برای دنباله ی درجه دوم زیر یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله ی عمومی دنباله را بیابید.
..... و ۲۹ و ۲۰ و ۱۳ و ۸ و ۵

دقت کنید که گفته دنباله درجه دوم، پس توی دنباله باید به دنبال عددهایی مثل ۴ و ۹ و ۱۶ و ۲۵ و ... بگردیم. عددهای دنباله رو به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$5 = 1 + 4$$

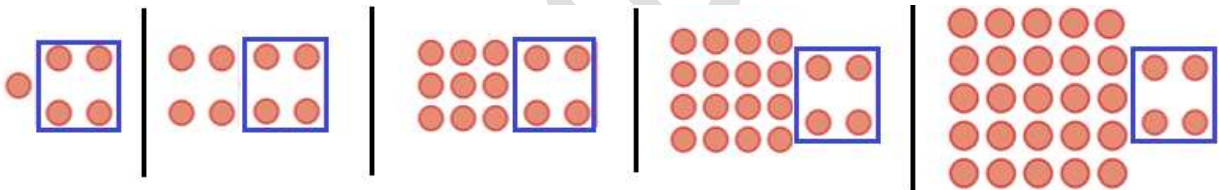
$$8 = 4 + 4$$

$$13 = 9 + 4$$

$$20 = 16 + 4$$

$$29 = 25 + 4$$

الگوی هندسی زیر رو می‌تونیم به این الگوی عددی نظیر کنیم:



با توجه به این شکلها، میتونیم عددهای الگو رو به صورت زیر بنویسیم تا بتونیم جمله عمومی رو حدس بزنیم:

$$5 = 1^2 + 4$$

$$8 = 2^2 + 4$$

$$13 = 3^2 + 4$$

$$20 = 4^2 + 4$$

$$29 = 5^2 + 4$$

بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت زیر همیشه:

$$t_n = n^2 + 4$$

بین ۳ و ۴۸ سه واسطه ی هندسی درج کنید. مساله چند جواب دارد؟ ۷

بین ۳ و ۴۸ باید سه تا عدد درج کنیم ولی نمی‌دونیم چه اعدادی، بنابراین:

$$۳ \quad \square \quad \square \quad \square \quad ۴۸$$

شماره جملات به صورت زیر میشه:

$$\begin{matrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & \square & \square & \square & ۴۸ \end{matrix}$$

پس جمله اول برابر ۳ و جمله پنجم برابر ۴۸ هست. یعنی:

$$t_1 = 3$$

$$t_5 = 48$$

ما می‌دونیم که جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت زیره:

$$t_n = t_1 r^{(n-1)}$$

پس جمله پنجم به دنباله هندسی از فرمول زیر به دست میاد:

$$t_5 = t_1 r^4$$

در این سوال ما t_1 و t_5 رو داریم، پس در فرمول قبل جاگذاری می‌کنیم:

$$48 = 3r^4$$

معادله رو حل می‌کنیم تا r به دست بیاد:

$$r^4 = 16 \rightarrow r = \pm 2$$

دو تا قدرنسبت به دست آوردیم، یعنی دو تا جمله عمومی داریم.

بنابراین جمله عمومی دنباله به صورت زیر می‌شود:

$$t_n = 3(2)^{(n-1)} \quad \text{یا} \quad t_n = 3(-2)^{(n-1)}$$

جمله عمومی هم به دست اومد ، حالا می‌فوییم جمله‌های دوام ، سوم ، چهارام رو به دست بیاریم.

برای جمله عمومی اول:

جمله اول رو در قدر نسبت ضرب کنیم تا جمله دوام به دست بیاد:

$$t_2 = 3 \times 2 = 6$$

جمله دوام رو در قدر نسبت ضرب می‌کنیم تا جمله سوم به دست بیاد:

$$t_3 = 6(2) = 12$$

جمله سوم رو در قدر نسبت ضرب می‌کنیم تا جمله چهارام به دست بیاد:

$$t_4 = 12(2) = 24$$

بنابراین جملات دنباله به صورت زیر می‌شود:

$$3 \text{ و } 6 \text{ و } 12 \text{ و } 24 \text{ و } 48$$

برای جمله عمومی دوام:

جمله اول رو در قدر نسبت ضرب کنیم تا جمله دوام به دست بیاد:

$$t_2 = 3 \times -2 = -6$$

جمله دوام رو در قدر نسبت ضرب می‌کنیم تا جمله سوم به دست بیاد:

$$t_3 = -6(-2) = 12$$

جمله سوم رو در قدرنسبت ضرب می‌کنیم تا جمله چهارم به دست بیاد:

$$t_4 = 12(-2) = -24$$

بنابراین جملات دنباله به صورت زیر میشه:

$$3, -6, 12, -24, 48$$

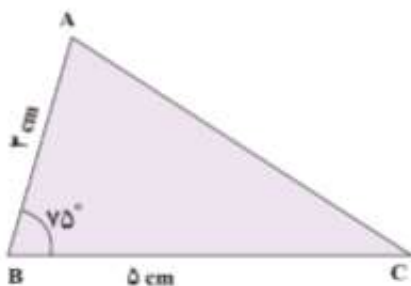
۸ | با کمک جدول زوایای مثلثاتی حاصل $\sin 30^\circ + \cos 30^\circ \times \tan 60^\circ$ را بیابید.

$$\sin 30 = \frac{1}{2}, \quad \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 60 = \sqrt{3}$$

بنابراین:

$$\sin 30 + \cos 30 \times \tan 60 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

توجه داشته باشید که اولویت ضرب از جمع بالاتره، پس باید اول ضرب انجام بشه بعد جمع.



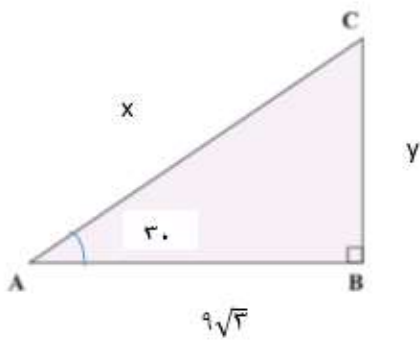
۹ | مساحت مثلث مقابل را بیابید.

$$(\sin 75^\circ = 0.96)$$

در هر مثلث با دانستن اندازه دو ضلع و زاویه بین اون دو ضلع، میشه مساحت رو به دست آورد:

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin 75$$

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 \times 0.96 = 4.8$$



۱۰. مقادیر x و y را در شکل زیر تعیین کنید.

از روابط مثلثاتی استفاده می‌کنیم:

$$\tan 30 = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{9\sqrt{3}} \rightarrow y = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow y = 9$$

برای به دست آوردن x داریم:

$$\sin 30 = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{9}{x} \rightarrow x = 18$$

۱۱. خطی با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه ۴۵ درجه می‌سازد و از نقطه $A = (0, 2)$ می‌گذرد. معادله‌ی این خط را بنویسید.

ما با داشتن شیب m و یک نقطه از خط، می‌توانیم از طریق رابطه:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

به نقطه از خط m و شکل به ما داده:

$$(x_1, y_1) = (0, 2)$$

پس ما فقط شیب خط رو لازم داریم.

شیب خط چیه؟ تاثرات زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور xها میسازه.

این زاویه چنده؟ ۴۵ درجه

$$\text{شیب} = \tan 45 = 1$$

بنابراین:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 2 = 1(x - 0) \rightarrow y = x + 2$$

۱۲ | اگر $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ و انتهای زاویه α در ناحیه (ربع) چهارم باشد. سایر نسبت های مثلثاتی زاویه α را تعیین کنید.

از روابط بین نسبتهای مثلثاتی شروع می‌کنیم تا بقیه نسبتها رو به دست بیاریم:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{3}{4}$$

میرونییم:

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

بنابراین:

$$\frac{16}{9} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

در ربع چهارم هستیم و در این ربع کسینوس مثبت، بنابراین:

$$\cos \alpha = +\frac{3}{5}$$

کسینوس رو به دست آوردیم، بنابراین:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

بنابراین:

$$\sin^2 \alpha + \left(+\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{16}{25} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

در ربع چهارم هستیم و در این ربع، سینوس منفیه بنابراین:

$$\sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

درستی تساوی های مقابل را بررسی کنید:

۱۳

الف) $\frac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta} = \tan\theta$

ب) $\frac{1}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

الف:

از سمت چپ تساوی شروع می کنیم تا به سمت راست برسیم:

$$\frac{1 + \tan\theta}{1 + \cot\theta} =$$

به جای $\tan\theta$ قرار میدیم $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ و صورت رو ساده می کنیم:

صورت:

$$1 + \tan\theta = 1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta}$$

به جای $\cot\theta$ قرار میدیم $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ و صورت رو ساده می‌کنیم:

مفرج:

$$1 + \cot\theta = 1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta}$$

صورت و مفرج رو باگذاری می‌کنیم:

$$\frac{1 + \tan\theta}{1 + \cot\theta} = \frac{\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta}} =$$

در دور دور ، نزدیک در نزدیک می‌کنیم:

$$\frac{1 + \tan\theta}{1 + \cot\theta} = \frac{\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta}} = \frac{\sin\theta(\cos\theta + \sin\theta)}{\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

به سمت راست تساوی رسیدیم. پس تساوی درسته.

ب:

به جای $\tan\theta$ قرار میدیم $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$:

$$\frac{1}{\sin\theta} \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$$

به سمت راست تساوی رسیدیم. پس تساوی درسته.

۱۴ | مشخص کنید که عدد $\sqrt[3]{-17}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار می گیرد

عدد ۱۷ بین کدوم دو عدد که توان ۳ هستن قرار داره؟

$$8 < 17 < 27$$

اینجا ۱۷ رو داریم ولی -17 رو میفوایم، پس طرفین رو در منفی ضرب می کنیم. توجه داشته باشید که علامت منفی باعث میشه که جهت نامساویها عوض بشه:

$$-8 > -17 > -27$$

از طرفین ریشه سوم می گیریم:

$$\sqrt[3]{-8} > \sqrt[3]{-17} > \sqrt[3]{-27} \rightarrow -2 > \sqrt[3]{-17} > -3$$

پس $\sqrt[3]{-17}$ بین -2 و -3 قرار داره.

۱۵ | جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

الف) هر عدد مثبت دارای ریشه چهارم است که یکدیگرند.

ب) اعداد ریشه چهارم ندارند. ج) هر عدد مثبت یا منفی دارای ریشه پنجم است.

الف: دو ریشه، قرینه

بطور کلی هر عدد مثبت دارای ۲ ریشه زوجه که قرینه یکدیگرند

ب: منفی

بطور کلی اعداد منفی زوج ندارند

ج: یک

بطور کلی هر عدد مثبت یا منفی دارای یک ریشه فرد

اگر $0 < a < 1$ - آنگاه در داخل مربع علامت $<$ یا $>$ بگذارید.

الف) $a^5 \square a^3$ ب) $\sqrt[3]{a} \square \sqrt[5]{a}$

الف:

عدد بین ۰ و ۱- هست، بنابراین هر چی به توان بالاتری برسه بزرگتر میشه. پس:

$$a^5 > a^3$$

توجه داشته باشید که آگه توان یکی از عددها زوج بود، اون عدد هتما بزرگتر میشه، چون توان زوج، مثبت رو به منفی تبدیل می‌کنه و هر عدد مثبت از هر عدد منفی بزرگتره.

یه راه دیگه برای این سوال اینه که یه عدد رو انتخاب کنیم و توان ۵ و ۳ اون رو حساب کنیم تا ببینیم کدوم بزرگتره.

عدد بین ۰ و ۱- هست، پس ما عدد -0.1 رو انتخاب می‌کنیم:

$$a^5 = -0.00001$$

$$a^3 = -0.001$$

بین این دو عدد کدوم بزرگتره؟ -0.00001 . چرا؟ چون به صفر نزدیکتره

(اعداد منفی هر چی به صفر نزدیکتر باشن، بزرگترن)

ب:

ریشه گرفتن و به توان رسوندن دو تا عمل عکس همدیگه هستن. پس چون در قسمت قبل عددی که به توان ۵ رسوندیم بزرگتر از عددی بود که به توان ۳ رسونده بودیم، نتیجه می‌گیریم:

عددی که ازش ریشه پنجم گرفتیم از عددی که ازش ریشه سوم گرفتیم کوچکتره:

$$\sqrt[3]{a} > \sqrt[5]{a}$$

بطور کلی آگه یه عدد بین ۰ و ۱- داشته باشیم، هر چی مرتبه ریشه‌ش بالاتر باشه عدد کوچکتر میشه

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال @RiaziBaHam

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتفانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.